

# Els mons impossibles de M. C. Escher

**Toni Sellarès**

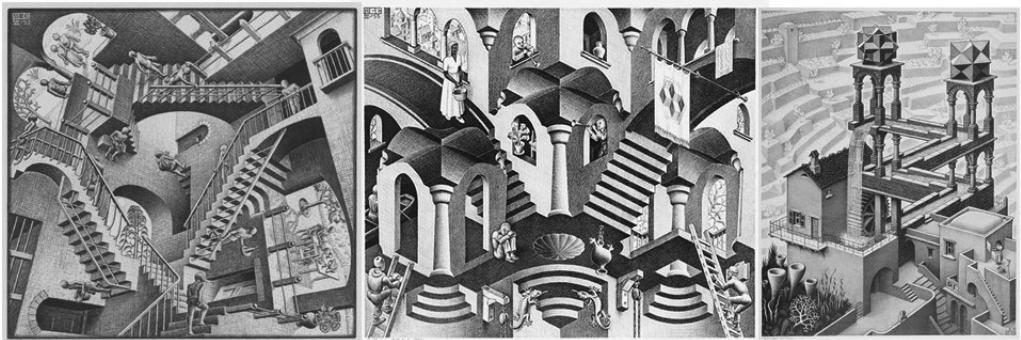
Professor jubilat del Departament d'Informàtica, Matemàtica Aplicada i Estadística de la Universitat de Girona

## Resum

Aquest article comença amb una breu introducció als conceptes de *perspectiva*, *imatge ambigua* i *objecte impossible*, que després es fan servir per analitzar tres de les obres de M. C. Escher que representen «mons impossibles»: *Relativitat*, *Convex i Còncav* i *Cascada*.

## Abstract

*This article begins with a brief introduction to the concepts of perspective, ambiguous image, and impossible object, which are then used to analyze three works by M. C. Escher representing "impossible worlds": Relativity, Convex and Concave and Waterfall.*



**Mons impossibles de M. C. Escher: *Relativitat* (1953), *Convex i còncav* (1955) i *Cascada* (1961).**

M. C. Escher va crear espais arquitectònics que a primera vista percebem com a reals però que quan els analitzem amb deteniment comprovem que són mons impossibles. Ho va poder fer gràcies a la seva habilitat artística, al domini de la perspectiva i al coneixement de les imatges ambigües i dels objectes impossibles. Podeu trobar una biografia d'Escher a [1] i la majoria de les seves obres a [2].

Aquest article està estructurat en quatre apartats que, des del punt de vista de la geometria, ajuden a entendre la manera com Escher va dissenyar els seus mons impossibles: «Imatges

en perspectiva», «Imatges ambigües en profunditat», «Objectes impossibles» i «Els mons impossibles de M. C. Escher», on s'analitzen les obres *Relativitat*, *Convex i còncav* i *Cascada*.

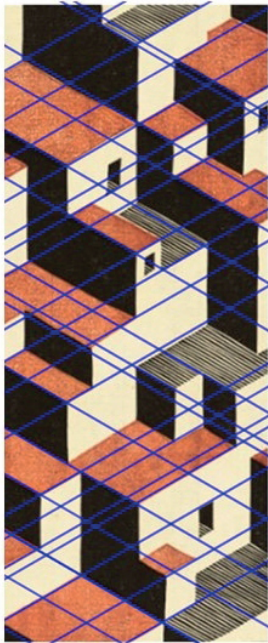
## Imatges en perspectiva

Una *imatge* és la representació d'un objecte o una escena tridimensional en un suport bidimensional (dibuix, pintura, fotografia...). La *perspectiva* és una tècnica per generar imatges que permet recrear la forma i la disposició dels objectes d'una escena. D'entre els diversos tipus de perspectiva existents, Escher va fer servir en les obres analitzades la perspectiva paral·lela ortogonal i la perspectiva central.

La perspectiva *paral·lela* representa una escena tridimensional sobre el pla del dibuix mitjançant la utilització de rectes projectants paral·leles entre si. Dues línies paral·leles a l'espai són també paral·leles en la seva representació al pla del dibuix. Una perspectiva paral·lela és *ortogonal* si les rectes projectants són perpendiculars al pla del dibuix. A les imatges fetes amb perspectiva paral·lela ortogonal, l'escena que s'ha de representar es posiciona de manera que cap de les seves tres direccions principals sigui paral·lela al pla del dibuix. Una de les direccions principals se sol representar verticalment, mentre que les representacions de les altres dues direccions formen amb l'horitzontal angles  $\alpha$  i  $\beta$ , en funció dels quals es classifiquen els diferents tipus de perspectiva paral·lela ortogonal.

La perspectiva es diu que és *isomètrica* si  $\alpha$  i  $\beta = 30^\circ$  i és *dimètrica* si  $\alpha$  i  $\beta \neq 30^\circ$ .

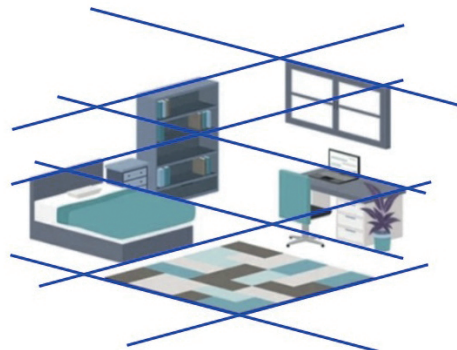
### Perspectiva Isomètrica



M.C. Escher, *Metamorfosi II* (detall), 1939/1940

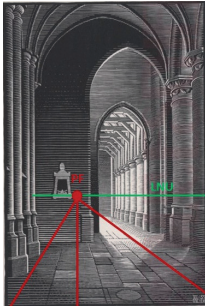
**Perspectiva isomètrica:  $\alpha$  i  $\beta = 30^\circ$**

### Perspectiva Dimètrica

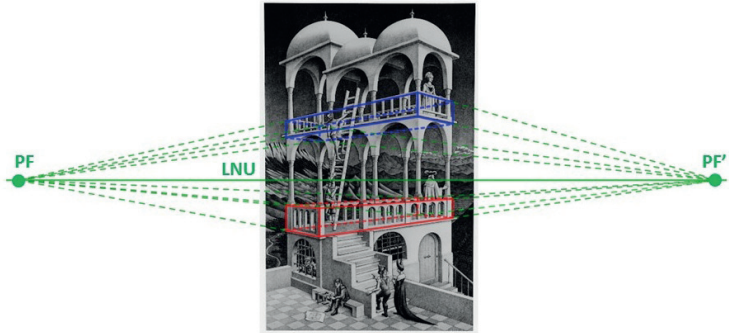


**Perspectiva dimètrica:  $\alpha$  i  $\beta \neq 30^\circ$**

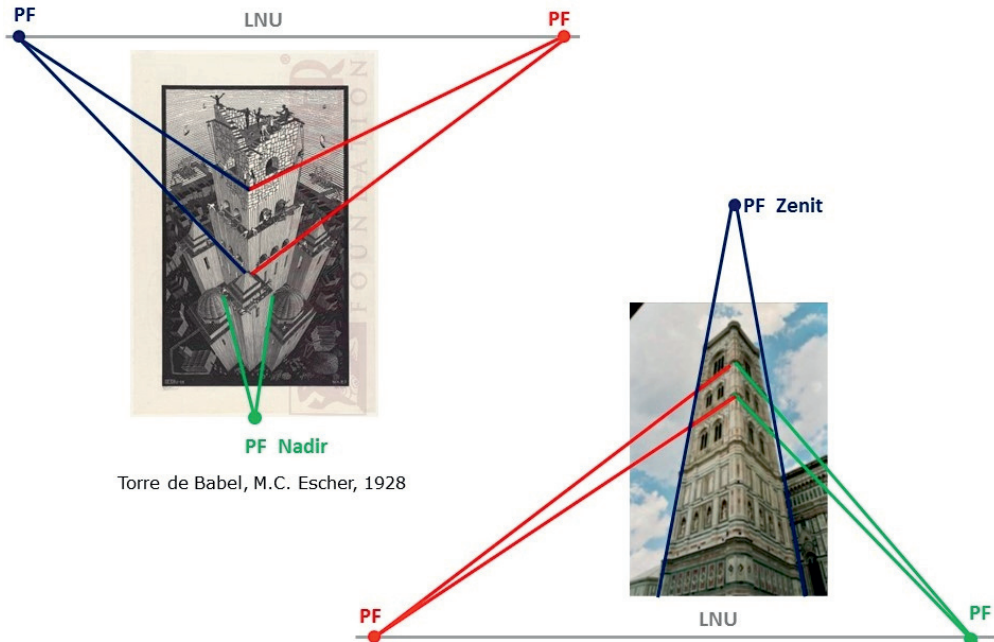
La perspectiva *central* representa una escena tridimensional sobre el pla del dibuix mitjançant la utilització de rectes projectants que passen pel punt de vista des del qual mira l'observador. Permet reconstituir mentalment la forma i la profunditat dels objectes representats i la seva posició relativa. La *línia del nivell de l'ull* (LNU) és la recta horitzontal del pla del dibuix situada al nivell del punt de vista. Un *punt de fuga* (PF) és aquell en el qual convergeixen les projeccions d'un grup de rectes paral·leles de l'escena que s'ha de representar que no són paral·leles al pla del dibuix. Cada conjunt de rectes paral·leles de l'escena té el seu propi punt de fuga. La posició del punt de vista i la del pla del dibuix respecte de l'escena determinen tres tipus de perspectiva central: d'un, de dos i de tres punts de fuga.



**Perspectiva d'un punt de fuga**  
Església Nieuwe de Delft.  
M. C. Escher, 1939.



**Perspectiva de dos punts de fuga**  
Mirador. M. C. Escher, 1958.



Torre de Babel, M.C. Escher, 1928

**Perspectiva de tres punts de fuga.**

Dins la imatge anterior «Torre de Babel. M. C. Escher, 1928», les arestes verticals es representen per mitjà de segments la prolongació dels quals convergeix en un punt de fuga anomenat *zenit* o *nadir* segons si l'observador mira cap amunt o cap avall.

Les imatges obtingudes amb perspectiva central representen la realitat amb més fidelitat que les obtingudes amb perspectiva paral·lela ortogonal. La perspectiva paral·lela ortogonal es fa servir per representar imatges ambigües i objectes impossibles. La perspectiva central és especialment útil per representar de manera realista escenes on hi ha línies rectes paral·leles, com, per exemple, la majoria de vistes d'exterior i interiors d'edificis.

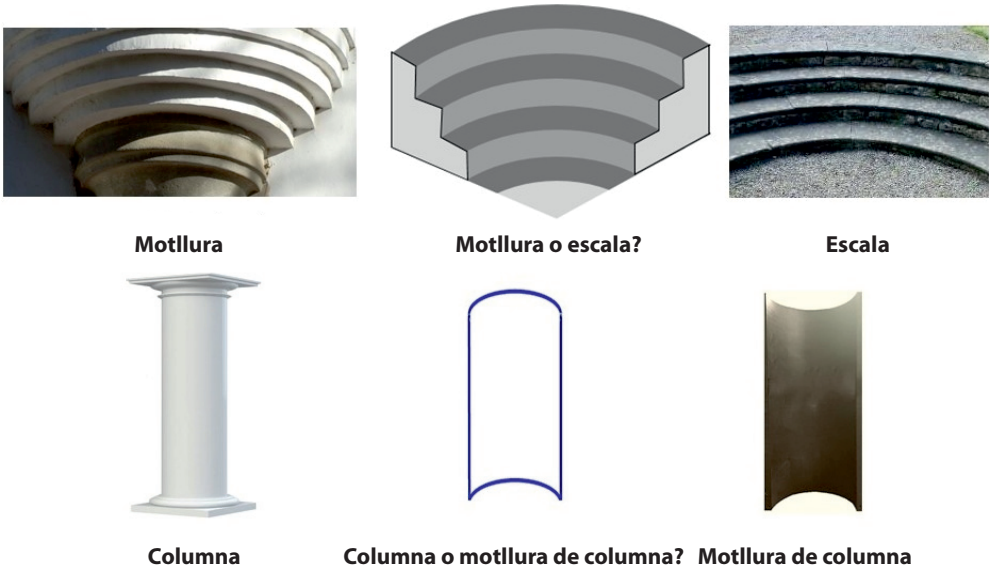
### Imatges ambigües en profunditat

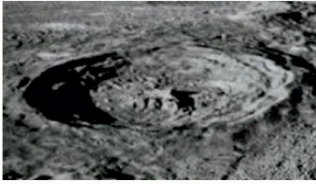
Una imatge és *ambigua* [3] si el que representa es pot interpretar de diverses maneres. Durant l'observació d'una imatge ambigua, les diferents interpretacions no es perceben mai simultàniament i poden revertir-se instantàniament sense que ho puguem controlar.



**Exemples d'imatges ambigües que Escher fa servir a *Convex i còncav*.**

És difícil que un observador pugui revertir una imatge ambigua a voluntat, però després de mostrar-li les versions inequívokes de la imatge és molt més probable que sigui capaç de percebre les seves dues possibles interpretacions.





**Cavitat**



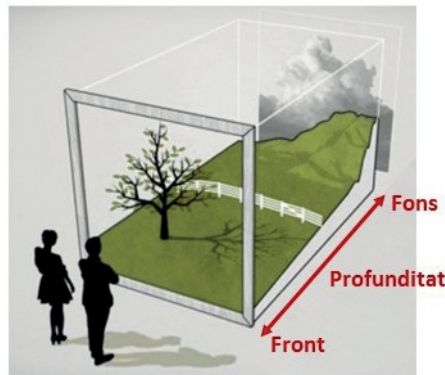
**Cavitat o protuberància?**



**Protuberància**

## Ambigüitat en profunditat

La profunditat és la distància percebuda per l'observador entre el front i el fons de l'objecte o l'escena representada.



Una imatge és ambigua en *profunditat* quan s'inverteixen espontàniament les parts que percebem com a properes i com a allunyades a causa de la manca de referències sobre la seva profunditat. Per tant, podem veure dues orientacions diferents de l'objecte o l'escena.

Per a la representació d'imatges ambigües en profunditat generalment es fa servir perspectiva paral·lela ortogonal perquè: les línies i superfícies paral·leles es representen per mitjà de línies i superfícies paral·leles idèntiques; els objectes de la mateixa mida es representen també de la mateixa mida. Per això, quan observem una imatge representada en perspectiva paral·lela ortogonal no queda clar quines parts són més properes i quines són més allunyades, de manera que les podem percebre de les dues formes sense que la imatge perdi coherència en la seva interpretació tridimensional. L'atenció selectiva cap a una de les parts més properes d'un objecte representat en una imatge ambigua en profunditat afavoreix la percepció d'una de les dues possibles interpretacions de l'objecte. Si ens fixem alternativament en les dues parts de l'objecte escollides com a més properes, llavors augmenta la probabilitat d'una inversió entre les dues interpretacions possibles.





**Part central més propera: columna**

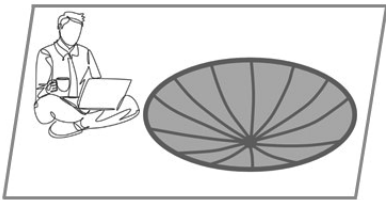


**Columna o motllura de columna?**

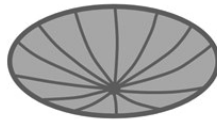


**Parts laterals més properes: motllura de columna**

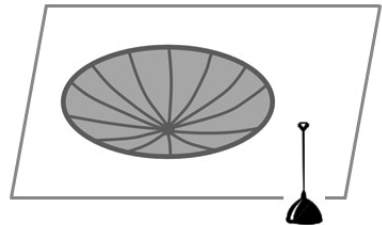
Si afegim informació a la imatge ambigua, augmenta la probabilitat de percebre una de les dues interpretacions possibles.



**Cavitat**



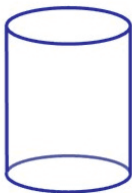
**Cavitat o protuberància?**



**Protuberància**

Anem a raonar perquè en la imatge de l'ambigüïtat que es pot interpretar com una columna o la motllura d'una columna són possibles les dues percepcions.

Si dibuixem les dues orientacions possibles d'un cilindre ambigu, l'un vist des de sobre i l'altre vist des de sota, veiem que la part posterior del cilindre vista des de sobre i la frontal vista des de sota són idèntiques.



**Cilindre ambigu en perspectiva dimètrica**



**Cilindre vist des de sobre**



**Meitat posterior vista des de sobre: còncava**



**Cilindre vist des de sota**



**Meitat anterior vista des de sota: convexa**

Per a la resta de les ambigüitats en profunditat que va fer servir Escher també hi ha raonaments geomètrics que expliquen per què són possibles les dues percepcions (vegeu [3]).

## Objectes impossibles

Un *objecte* es diu que és *impossible* si es pot representar en una imatge de manera que a primera vista l'observador el percep com a real tot i que físicament no es pot construir. Cada part d'un objecte impossible és plausible, però la falsa percepció de la profunditat relativa entre les parts fa que l'estructura global de l'objecte sigui inconsistent.

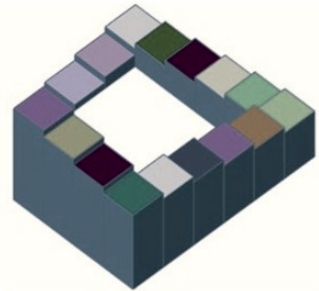
### Exemples d'objectes impossibles



**Cub impossible**



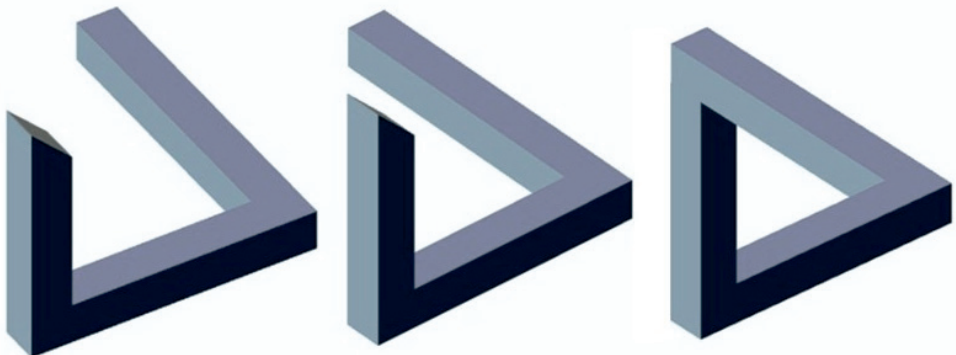
**Triangle de Penrose**



**Escala de Penrose**

Hi ha objectes tridimensionals que representats fent servir la perspectiva paral·lela ortogonal des d'un determinat punt de vista creen la il·lusió que coincideixen amb la imatge d'un objecte impossible.

Això passa perquè no és clar quines parts són més properes i quines són més allunyades, de manera que es poden percebre com a unides parts que en la realitat no ho estan. Si es canvia el punt de vista, es trenca la il·lusió.



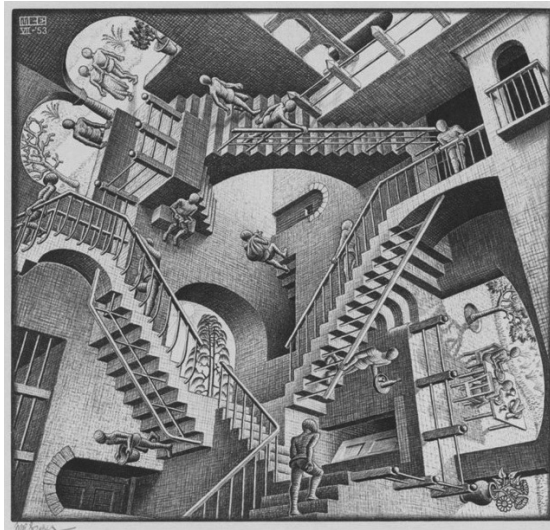
**Objecte tridimensional que representat des d'un determinat punt de vista crea la il·lusió d'un triangle de Penrose.**

## Els mons impossibles de M. C. Escher

En aquest apartat analitzem tres de les obres d'Escher que representen mons impossibles: *Relativitat*, *Convex i còncav* i *Cascada*.

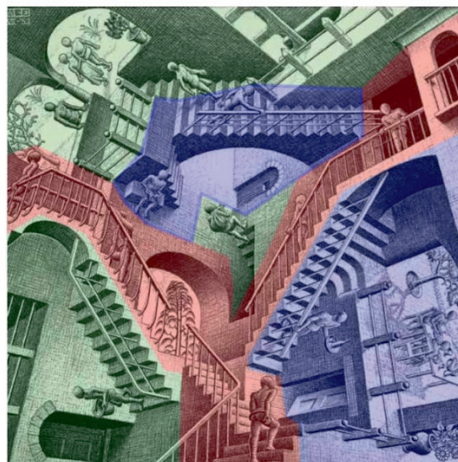
### *Relativitat*

A *Relativitat*, Escher mostra un espai que representa l'interior d'un edifici amb escales, balconades, portes i arcades que deixen veure una part de l'exterior. La majoria de les persones que hi ha a l'espai estan en posicions que desafien el sentit de la força de la gravetat. En mirar la imatge per primera vegada, la nostra reacció és de sorpresa i desconcert davant la representació d'un espai impossible!



***Relativitat*, M. C. Escher, 1953.**

Escher va dibuixar *Relativitat* dividint l'espai que s'ha de representar en tres subespais que en la següent figura es mostren de diferents colors.

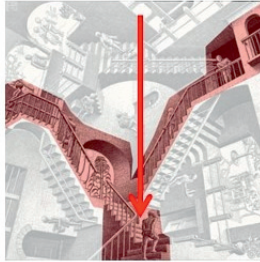




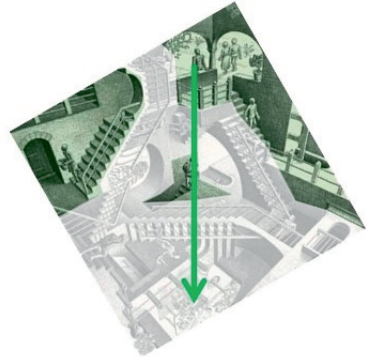
Girant la imatge subdividida seixanta graus en sentit antihorari i seixanta graus en sentit horari veiem que en cadascun dels tres subespais hi ha un sol sentit de la força de la gravetat: el «correcte» (cap avall). L'espai global, unió de tres subespais possibles, és impossible perquè hi ha presents tres sentits de la força de la gravetat.



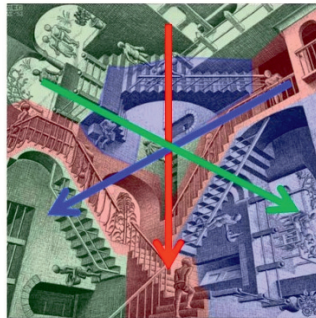
**Imatge girada 60°  
en sentit antihorari**



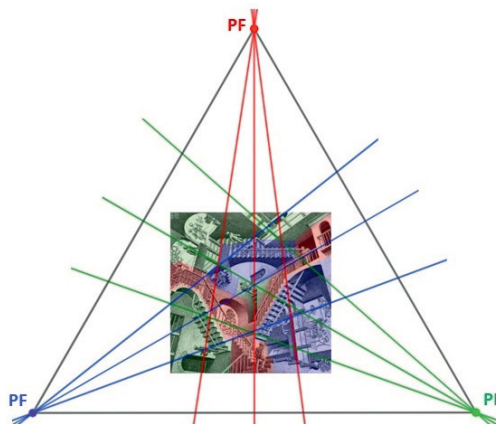
**Imatge original**



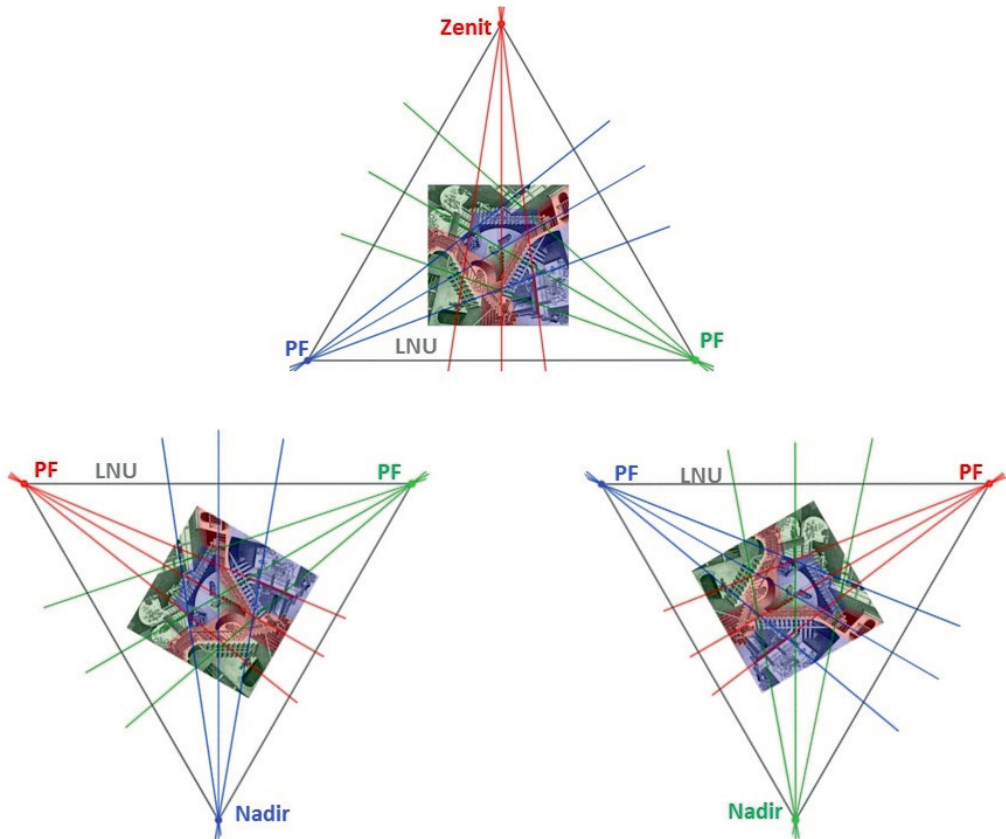
**Imatge girada 60°  
en sentit horari**



Per representar cadascun dels tres subespais de *Relativitat* Escher va fer servir la perspectiva central de tres punts de fuga. En les tres perspectives els punts de fuga són els vèrtexs del mateix triangle equilàter de base horitzontal. Com que el triangle que determina els punts de fuga és equilàter, cap de les tres perspectives distorsiona els subespais representats.



Una de les perspectives té com a línia de nivell de l'ull la base del triangle equilàter i com a zenit, el vèrtex superior. El punt de vista és baix. Les altres dues perspectives s'obtenen girant la imatge al voltant del centre del triangle  $60^\circ$  en sentits horari i antihorari, de manera que els altres dos costats del triangle passen a ser línies de nivell de l'ull i els vèrtexs oposats nadirs.



L'anàlisi de *Relativitat* permet passar de la sorpresa i el desconcert inicials davant la representació d'un espai impossible, a veure que aquest espai és el resultat de la unió de tres subespais que són possibles mirats des de diferents punts de vista. Tal com possiblement Escher volia fer notar, la nostra percepció de l'espai és *relativa*.

### ***Convex i còncav***

A *Convex i còncav* Escher mostra un espai amb elements arquitectònics representats de manera ambigua: columnes, escales, voltes... Inevitablement, el canvi involuntari entre les dues possibles percepcions dels elements ambigus sorprèn l'observador.

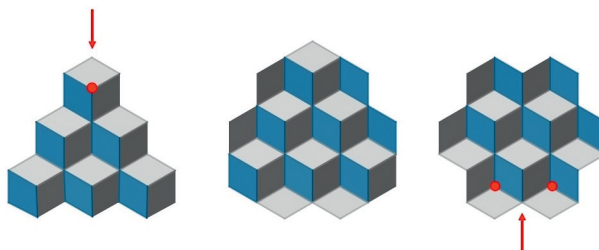


**Convex i còncav M. C. Escher, 1955. Litografia.**

A més a més, a la part central de l'obra Escher combina hàbilment els elements arquitectònics ambigus per representar una estructura que és impossible en la realitat, cosa que desconcerta el ja sorprès observador:

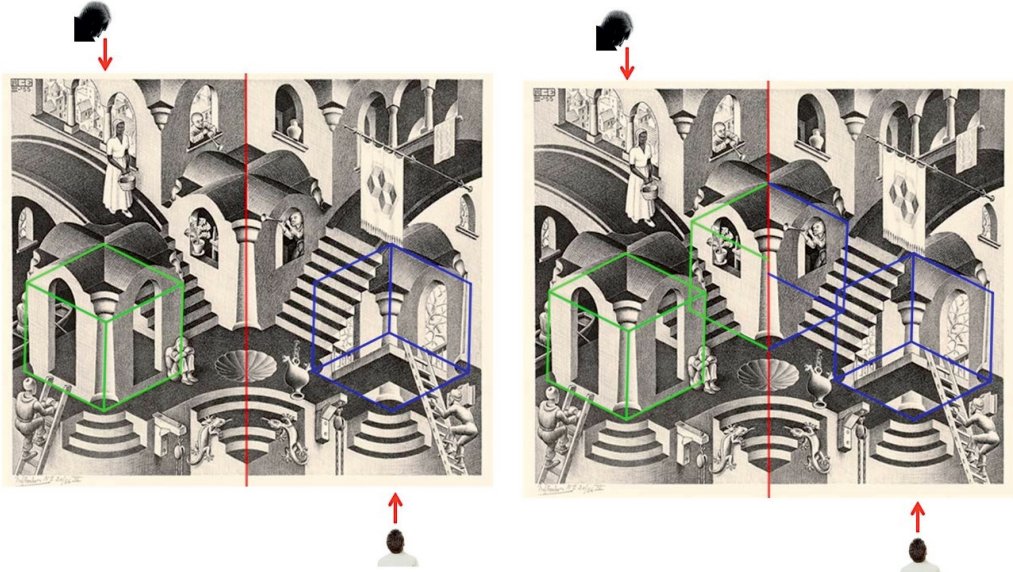
- El terra on hi ha un noi assegut és també el sostre del qual penja un ornament.
- Si, com la dona amb el cistell a la mà, baixem l'escala de l'esquerra, creuem el replà central i pugem l'escala de la dreta, de sobte descobrirem que estem a la part de sota d'una arcada.
- La volta que uneix la paret que té una finestra amb un test, amb la paret que té una finestra amb una gerra, a la part esquerra és el sostre d'un templet, mentre que a la part dreta és el sota d'una galeria.
- La volta que uneix les dues parets on hi ha dos homes tocant el clarinet des de la finestra, a la part esquerra és el sostre d'un templet, mentre que a la part dreta és el sota d'un voladís que protegeix la finestra.

A la part superior dreta de *Convex i còncav* hi ha una bandera amb un conjunt de cubs adjacents, coneguts com a «cubs reversibles». Els cubs estan dibuixats en perspectiva paral·lela ortogonal dimètrica, de manera que podem percebre que els mirem tant des de sobre com des de sota. La interpretació depèn de si percebem els rombes grisos com la cara superior o la cara inferior dels cubs.

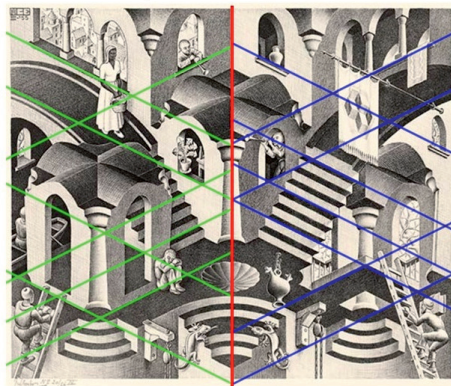


**Cubs reversibles.**

Amb aquesta bandera que mostra uns cubs reversibles, probablement Escher va voler suggerir que si dividim l'obra verticalment en dues parts per la meitat de la columna central, la part esquerra de *Convex i còncav* és vista des de sobre i la dreta, des de sota. La part central de *Convex i còncav*, on convergeixen la part vista des de sobre i la part vista des de sota, és una representació que en la realitat és impossible.

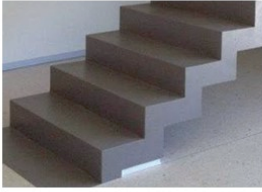


Per representar cadascuna de les dues parts de *Convex i còncav* Escher va fer servir la perspectiva paral·lela ortogonal dimètrica i, per tant, la representació de les dues direccions principals no verticals forma amb l'horitzontal angles iguals i diferents de  $30^\circ$ . A més a més, Escher va fer que en les dues parts de l'obra la representació de les dues direccions principals no verticals coincidís.

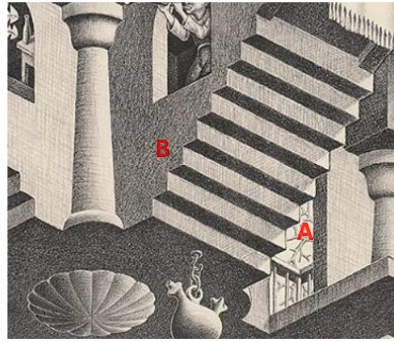


Gràcies a fer servir la perspectiva dimètrica, Escher va poder representar elements arquitectònics ambigus en profunditat. Tot seguit, per a alguns d'aquests elements ambigus mostrem dues imatges inequívocues de l'objecte representat, per tal que augmenti la probabilitat que l'observador sigui capaç de percebre les seves dues possibles interpretacions.

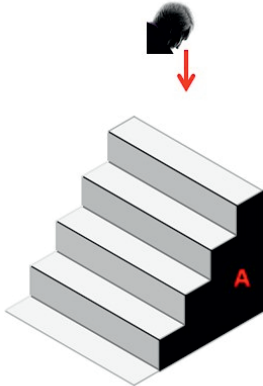




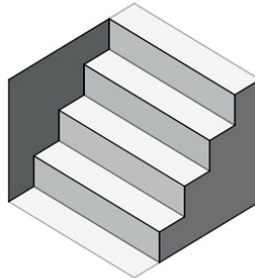
Escala



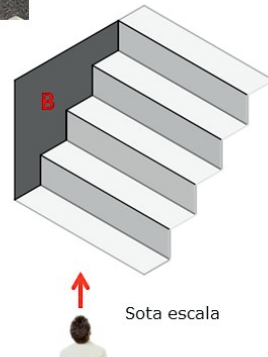
Sota escala



Escala



Escala o sota escala?

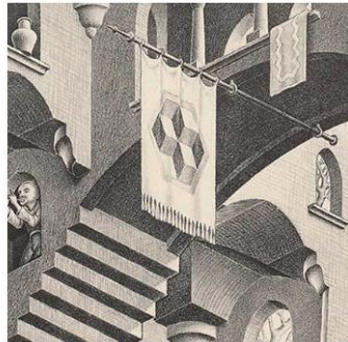


Sota escala

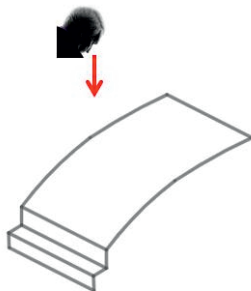
**Escala o sota escala.**



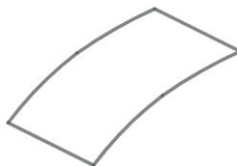
Sobre de volta



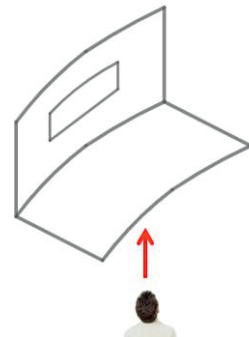
Sota de volta



Sobre de volta



Sobre o sota de volta?



Sota de volta

**Sobre o sota de volta.**

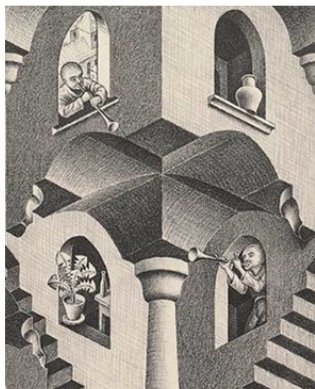




Sobre de voltes



Sobre de voltes



Sobre o sota de voltes?



Sota de voltes



Sota de voltes

### Sobre o sota de voltes.

A *Convex i còncav* Escher crea un espai arquitectònic que ens desconcerta quan observem per primera vegada. Si dividim l'obra verticalment en dues parts per la meitat de la columna central, la part esquerra és vista des de sobre i la dreta, des de sota, mentre que la part central —on convergeixen les dues vistes— és una construcció impossible en la realitat. A més, Escher combina hàbilment diversos elements arquitectònics ambigus en profunditat, de manera que quan fixem l'atenció en un d'aquests elements, percebem confosos, alternativament i de manera involuntària, les seves dues possibles interpretacions.

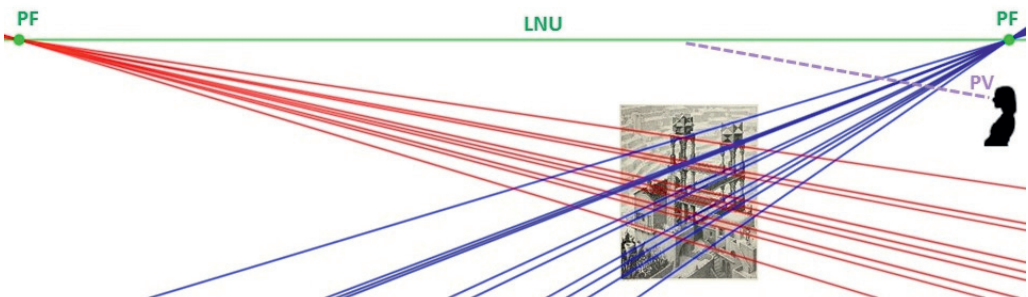
### Cascada

A *Cascada* Escher mostra una estructura arquitectònica en la qual destaquen un aqüeducte en forma de ziga-zaga, una sínia i una cascada. En mirar l'obra per primera vegada no veiem res estrany, però en analitzar-la amb més deteniment veiem que l'aigua flueix de la sínia, baixa pel lleuger pendent de l'aqüeducte fins a arribar a la part superior de la cascada i es precipita sobre la sínia on ha començat el recorregut. Confosos, ens adonem de la impossibilitat que l'aigua baixi perpètuament.

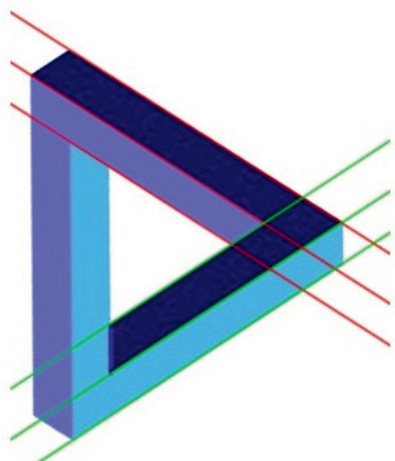


**Cascada. M. C. Escher, 1961. Litografia.**

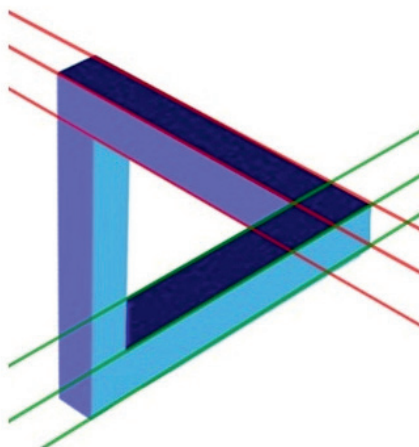
Per representar *Cascada*, Escher va fer servir la perspectiva central de dos punts de fuga. El punt de vista, situat a l'alçada de la línia de nivell de l'ull, és molt alt i els dos punts de fuga es troben molt allunyats de la imatge representada.



Per crear l'aqüeducte, la part més sorprenent de *Cascada*, Escher es va basar en el triangle de Penrose. En comptes de representar el triangle fent servir la perspectiva paral·lela ortogonal, tal com es fa habitualment, ho va fer amb la perspectiva central de dos punts de fuga. En col·locar els dos punts de fuga molt allunyats de la imatge se segueix creant la il·lusió d'un triangle impossible.

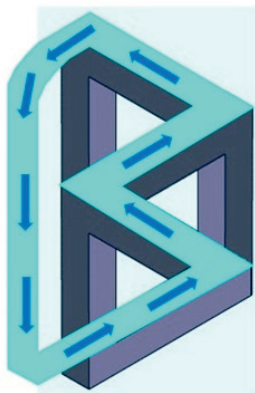
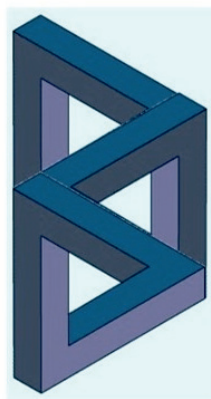


**Perspectiva paral·lela**



**Perspectiva central amb dos punts de fuga molt allunyats**

Escher va representar l'aqüeducte de *Cascada* combinant tres triangles de Penrose, amb la qual cosa va crear un nou objecte impossible. La baixada de l'aigua en ziga-zaga per l'aqüeducte i la cascada sembla perfectament natural.



Tot i que siguem conscients que la representació que veiem a *Cascada* no és possible en el món real, el fet que Escher hi barregi elements impossibles amb altres de normals fa més difícil que ens qüestionem la seva impossibilitat.

## Comentaris finals

L'anàlisi que hem fet de *Relativitat*, *Convex i còncav* i *Cascada* mostra que la geometria ajuda a entendre els aspectes més sorprenents i desconcertants d'aquestes obres d'Escher. El tipus d'anàlisi geomètrica utilitzada per estudiar les tres obres presentades es pot estendre a altres dels mons impossibles creats per Escher (vegeu <https://sellamonsimpossiblesmcescher.blogspot.com/p/mons-impossibles-de-mc-escher.html>).

Des del punt de vista didàctic, els mons impossibles d'Escher i la seva vinculació amb la perspectiva, les imatges ambigües i els objectes impossibles, proporcionen un marc diferent de l'habitual per incentivar l'interès dels estudiants per la geometria.

Vull expressar el meu agraïment a l'amic Carles Barceló pels seus comentaris i suggeriments, que han ajudat a millorar el contingut d'aquest article.

## Referències

- [1] *Biografia de M. C. Escher*. [https://ca.wikipedia.org/wiki/Maurits\\_Cornelis\\_Escher](https://ca.wikipedia.org/wiki/Maurits_Cornelis_Escher).
- [2] *Obres de M. C. Escher*. <https://mcescher.com/gallery/most-popular/>.
- [3] *Imatges ambigües*. <https://sellamonsimpossiblesmcescher.blogspot.com/p/imatges-ambigues.html>.

